

ISSIQLIK UZATISH JARAYONLARINI YANGI MATEMATIK MODELASHTIRISH ORQALI ENERGIYA SAMARADORLIGINI OSHIRISH

Shaimov Komiljon Mirzakabulovich,

SamDAQU, "Axborot texnologiyalari" kafedrasida katta o'qituvchisi, t.f.f.d. (PhD)

Annotatsiya: Ushbu maqolada issiqlik uzatish jarayonlarini modellashtirish va ularni sonli yechish algoritmlarini yaratishga bag'ishlangan. Issiqlik uzatish energiyani bir mustahkamlikdan ikkinchisiga uzatish jarayoni bo'lib, turli sanoat va texnologiya sohalarida katta ahamiyatga ega. Turli xil issiqlik uzatish jarayonlarining to'g'ri matematik modellarini yaratish, ularni sonli usullar yordamida yechish va natijalarni tadbiq etish orqali energiya samaradorligini oshirish mumkin. Bu jarayonlarning aniq modellari va algoritmlari qurilish va ilm-fandagi qator muammolarni hal qilish uchun muhim ahamiyatga ega.

Kalit so'zlar: Issiqlik uzatish, matematik model, konveksiya, nurlanish, chekli ayirmali usullar

Аннотация: Данная статья посвящена моделированию процессов теплопередачи и созданию алгоритмов их численного решения. Теплопередача — процесс передачи энергии от одного твердого тела к другому, имеющий большое значение в различных областях промышленности и техники. Повысить энергоэффективность можно путем создания правильных математических моделей различных процессов теплопередачи, решения их численными методами и применения результатов. Точные модели и алгоритмы этих процессов важны для решения ряда задач строительства и науки.

Ключевые слова: Теплообмен, математическая модель, конвекция, излучение, методы конечных разностей

Annotation: This article is devoted to modeling heat transfer processes and creating algorithms for their numerical solution. Heat transfer is the process of transferring energy from one solid body to another, which is of great importance in various fields of industry and technology. Energy efficiency can be improved by creating correct mathematical models of various heat transfer processes, solving them using numerical methods and applying the results. Accurate models and algorithms of these processes are important for solving a number of problems in construction and science.

Keywords: Heat transfer, mathematical model, convection, radiation, finite difference methods

KIRISH. Jahonda energiya resurslari va uy-joy kommunal xizmatlari uchun tariflar narxining uzluksiz o'sib borishi bilan issiqlik ta'minoti tizimlarining samaradorligini oshirish muammolarini hal etish masalalarining yechimiga bo'lgan e'tibor ortib bormoqda. Bunday masalalarning yechimida sonli usullar alohida ahamiyat kasb etmoqda.

Bugungi kunda sonli usullar fenomenologik va stoxastik usullarni to'ldirib, bilish nazariyasining asosiy elementiga aylanib bormoqda. U katta hajmli ma'lumotlarni qayta ishlash va tahlil etishga, jumladan ko'p o'lchovli xususiy xosilali chiziqli va chiziqsiz tenglamalar va ularning sistemalarini yechishga keng qo'llanilmoqda.

Respublikamizda ham konveksiya – diffuziya – reaksiya turidagi chiziqli va chiziqsiz tenglamalar va ularning sistemalarini yechishga yo'naltirilgan sonli usullar rivojlantirilmoqda va ular moddiy nuqta va tutash muhit mexanikasi, tibbiyot, fizika, kimyo, energetika, qurilish, neft va gaz sanoati kabi iqtisodiyot va fan sohalarining masalalariga joriy etilmoqda.

Muayyan obyekt uchun turli xil ro'yaxatlar bo'yicha ichki va tashqi omillarni birlashtirib, ko'plab matematik modellarni yaratish mumkin. Bunday holda tadqiqot obyektning bog'lanishlari va xususiyatlari ko'rinishidagi eng muhim omillarini hisobga olish bilan cheklanish kerak. Misol uchun, maishiy va sanoat sharoitida yonish jarayonini modellashtirishda asosiy talablardan biri yonuvchi vositaning to'liq yonishini ta'minlashdir. Shu bilan birga, samolyotlarning kuch qurilmalarida, xususan reaktiv dvigatellarda

(raketalarda) yoqilg'ining oxirigacha yonmasligi 15% gacha yetadi. Shu sababli matematik model natijalarini tushunib olgandan so'ng, matematik modelni shakllantirish bosqichiga qayta murojaat qilish istisno qilinmaydi.

Ikkinchi bosqichda matematik modelni o'rganish amalga oshiriladi. Kamdan-kam hollarda oddiy va chiziqli modellar uchun aniq analitik yechimni qurish mumkin [1], bu obyektning xususiyatlarini baholashni osonlashtiradi. Ammo ko'pincha maqsadga erishish uchun obyektning xususiyatlarini sifat va miqdoriy baholash, murakkab va aniq modeldan olingan taqribiy natijalar qo'llaniladi. Ammo ular obyektning xususiyatlarini fizik modeldagiga qaraganda 2-4 marta aniqroq tasvirlashlari kerak. Obyektning yaxshi tanlangan modeliga ushbu sinf muammolariga mos keladigan taqribiy usullar qo'llanilishi mumkin. Masalan, turli xil issiqlik uzatish jarayonlari (o'tkazish, konveksiya va nurlanish) uchun aniq va to'g'ri matematik modellar ishlab chiqiladi. Yaratilgan modellar asosida sonli yechimlarni topish uchun yangi va samarali algoritmlar ishlab chiqiladi. Bu algoritmlar jarayonlarni tez va aniq hisoblash imkonini beradi. Model va algoritmlardan sanoat va texnologiya sohalaridagi real muammolarni yechishda, jumladan, issiqlik almashinuv qurilmalari, energiya samaradorligi yuqori bo'lgan tizimlar va qurilmalarni optimallashtirishda foydalanish imkoniyatlari o'rganiladi.

Algoritm tavsifini chalkashtirib yubormaslik uchun usulni qo'llash obyekt sifatida bir o'lchovli bir jinsli

bo'lmagan parabolik tenglama qabul qilinadi, asosiy omillar esa klassik issiqlik uzatish nazariyasi doirasida izohlandi. Usulning mohiyati quyidagicha [2]. Dastlab izlanayotgan funksiyaning chegaraviy qiymatlari berilgan deb faraz qilish bilan masala yechiladi. Keyin izlanayotgan funksiyaning faraz qilingan chegaraviy va yangi topilgan chegaraviy qiymatlari o'rtasidagi o'zaro

bog'lanishlar chegaraviy shartlarga muvofiq tuziladi. Ushbu munosabatlardan Dirixle masalasi doirasidagi to'g'ri chiziqlar usuli bilan amalga oshiriladigan funksiyaning chegaraviy qiymatlari aniqlanadi. Usul tenglama va chegaraviy shartlar chiziqli bo'lmaganda ham qo'llanilishi mumkin.

METOD. Issiqlik uzatish tenglamasi quyidagicha shaklda qabul qilinadi:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x, t)$$

Haroratning boshlang'ich taqsimoti $T(x, 0) = T^0(x)$, va shartlar berilgan deb faraz qilamiz: $T(0, t) = \mu_0(t)$, $T(l, t) = \mu_l(t)$.

Dirixle masalasi shu tarzda qo'yiladi. Shartning o'ng tomonidagi $\mu_0(t)$ va $\mu_l(t)$ funksiyalar boshqa chegaraviy shartlar uchun qiymatlari keyin aniqlanadigan miqdorlar hisoblanadi.

Tekis to'r $\omega_x = \left(x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, N+1; h = \frac{l}{N+1} \right)$, $u_i(t)$ va $f_i(t)$ to'r funksiyalari kiritildi.

Hisoblash sohasi to'rining ichki tugunlarida tenglama \mathcal{X} koordinatasi bo'yicha ikkinchi tartib aniqlikda aproksimatsiyalandi [3]:

$$\frac{du_i^{n+1}}{dt} = \frac{a^2}{h^2} (u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}) + f_i^{n+1}.$$

Bunday holda chegara tugunlarida faraz qilingan μ_0^{n+1} va μ_l^{n+1} chegaraviy shartlari qanoatlaniriladi:

$$\frac{du_1^{n+1}}{dt} = \frac{a^2}{h^2} (\mu_0^{n+1} - 2u_1^{n+1} + u_2^{n+1}) + f_1^{n+1},$$

$$\frac{du_N^{n+1}}{dt} = \frac{a^2}{h^2} (u_{N-1}^{n+1} - 2u_N^{n+1} + \mu_l^{n+1}) + f_N^{n+1}.$$

Taqdim yetilgan differensial-ayirmali tenglamalardan biz

$$\frac{dU}{dt} = \frac{a^2}{h^2} AU + F \quad (1)$$

ko'rinishdagi matritsa tenglamani tuzamiz, bu yerda

$$U = (u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots, u_{N-1}^{n+1}, u_N^{n+1})^*,$$

$$A = \|a_{p,q}\|_N = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}_N,$$

$$F = \left(f_1^{n+1} + \frac{a^2}{h^2} \mu_0^{n+1}, f_2^{n+1}, \dots, f_{N-1}^{n+1}, f_N^{n+1} + \frac{a^2}{h^2} \mu_l^{n+1} \right)^*.$$

Bu yerda izlanayotganlar va matritsa elementlari indeksleri 1 dan N gacha o'zgaradi, yuqoridagi "*" belgi matritsani transponirlash amalini bildiradi. Tenglama (1) alohida izlanayotganlarga nisbatan avtonom tenglamalarga o'tishga imkon beradigan shaklda taqdim etilishi zarur[4].

$$A = B \Lambda B^{-1}, \quad B - \text{bu yerda elementlari } b_{s,p} = (-1)^{s+p} \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin \frac{\pi s p}{N+1} \quad A \text{ ga o'xshash bo'lgan}$$

fundamental matritsa $\Lambda \quad \lambda_s = -2 \left(1 + \cos \frac{\pi s}{N+1} \right)$ lardan iborat diagonal matritsa; B^{-1} - elementlari $b_{s,p}^- = b_{s,p}$

lardan iborat B ga teskari matritsa.

Biz (1) tenglamaning ikkala tomonini chapdan B^{-1} ga ko'paytirib,

$$\frac{dB^{-1}U}{dt} = \frac{a^2}{h^2} B^{-1}AU + B^{-1}F$$

tenglikni hosil qilamiz.

Yangi vektor-ustunni kiritamiz:

$$\begin{aligned} B^{-1}U &= BU = \bar{U} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_{N-1}, \bar{u}_N)^* = \\ &= \left(\sum_{p=1}^N b_{1,p} u_p, \sum_{p=1}^N b_{2,p} u_p, \dots, \sum_{p=1}^N b_{N-1,p} u_p, \sum_{p=1}^N b_{N,p} u_p \right)^* \end{aligned}$$

$A = B\Lambda B^{-1}$ bo'lgani uchun quyidagi tenglik o'rinli.

$$B^{-1}AU = B^{-1}B\Lambda B^{-1}U = (B^{-1}B)\Lambda(B^{-1}U) = \Lambda\bar{U}$$

U holda tenglama quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\frac{d\bar{U}}{dt} = \frac{a^2}{h^2} \Lambda\bar{U} + \bar{F}, \quad (2)$$

bu yerda

$$\begin{aligned} \bar{F} &= B^{-1}F = BF = (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_{N-1}, \bar{f}_N)^* = \\ &= \left(b_{1,1} \left(f_1^{n+1} + \frac{a^2}{h^2} \mu_0^{n+1} \right) + \sum_{r=2}^{N-1} b_{1,r} f_r^{n+1} + b_{1,N} \left(f_N^{n+1} + \frac{a^2}{h^2} \mu_1^{n+1} \right), \right. \\ & b_{2,1} \left(f_1^{n+1} + \frac{a^2}{h^2} \mu_0^{n+1} \right) + \sum_{r=2}^{N-1} b_{2,r} f_r^{n+1} + b_{2,N} \left(f_N^{n+1} + \frac{a^2}{h^2} \mu_1^{n+1} \right), \dots, \\ & b_{N-1,1} \left(f_1^{n+1} + \frac{a^2}{h^2} \mu_0^{n+1} \right) + \sum_{r=2}^{N-1} b_{N-1,r} f_r^{n+1} + b_{N-1,N} \left(f_N^{n+1} + \frac{a^2}{h^2} \mu_1^{n+1} \right), \\ & \left. b_{N,1} \left(f_1^{n+1} + \frac{a^2}{h^2} \mu_0^{n+1} \right) + \sum_{r=2}^{N-1} b_{N,r} f_r^{n+1} + b_{N,N} \left(f_N^{n+1} + \frac{a^2}{h^2} \mu_1^{n+1} \right) \right)^* \end{aligned}$$

(2) dan \bar{u}_i ga nisbatan alohida oddiy tenglamani ajratish mumkin:

$$\frac{d\bar{u}_i}{dt} = \frac{a^2}{h^2} \lambda_i \bar{u}_i + \bar{f}_i \quad (3)$$

Ushbu tenglama uchun boshlang'ich shart bo'lib, $\bar{U} = B^{-1}U = BU$ tenglikka ko'ra, $\bar{U} = B^{-1}U = BU$ ifoda xizmat qiladi. $\bar{u}_i^0 = \sum_{p=1}^N b_{i,p} u_p^0$ deb qabul qilamiz, bu yerda $u_p^0 = T(ph, 0)$ berilgan masalaning boshlang'ich shartidan iborat.

Tenglama (3) ni sonli usul bilan yechamiz. Vaqt bo'yicha yaqinlashishning ikkinchi tartib aniqligini tashkil qilish mumkin. Bayonning soddaligi uchun biz orqaga qaytish sxemasidan foydalanamiz va vaqt bo'yicha yuqori indeksni kiritamiz:

$$\frac{\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^n}{\tau_n} = \frac{a^2}{h^2} \lambda_i \bar{u}_i^{n+1} + \bar{f}_i^{n+1}.$$

Bundan $\bar{u}_i^{n+1} = \frac{\bar{u}_i^n + \tau_n \bar{f}_i^{n+1}}{1 - \tau_n a^2 \lambda_i / h^2} = d_i (\bar{u}_i^n + \tau_n \bar{f}_i^{n+1})$ ni topamiz. Bu yerda $d_i = 1 / (1 - \tau_n a^2 \lambda_i / h^2)$ belgilashdan

foydalanib, yangi vaqt uchun izlanayotgan harorat funksiyasiga teskari o'tishni amalga oshiramiz:

$$\begin{aligned} U^{n+1} &= B\bar{U}^{n+1} = (u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots, u_{N-1}^{n+1}, u_N^{n+1}) = \\ &= \left(\sum_{p=1}^N b_{1,p} \bar{u}_p^{n+1}, \sum_{p=1}^N b_{2,p} \bar{u}_p^{n+1}, \dots, \sum_{p=1}^N b_{N-1,p} \bar{u}_p^{n+1}, \sum_{p=1}^N b_{N,p} \bar{u}_p^{n+1} \right). \end{aligned}$$

Endi biz izlanayotgan funksiyani chegaradagi faraz qilingan qiymatlari bilan funksiyaning devor tugunlarida topilgan yangi qiymatlari orasidagi bog'liqlikni o'rnatamiz, ya'ni chegaraviy shartlarni qanoatlantiramiz.

Bizni izlanayotgan funksiya hosilasi kamida bitta chegara shartda qatnashadigan holatlar qiziqtiradi. Va umuman olganda, izlanayotganning chegara qiymati bilan birga, chekli-ayirmali tenglamada ikkita qo'shni tugunlardagi

funksiya qiymatlari ishtirok etgan holda yaqinlashishning ikkinchi tartibga ega bo'lgan yo'naltirilgan hosilalar qo'llanilgan deb qabul qilamiz. Ya'ni umumiy holda, $x = 0$ uchun

$$\mu_0^{n+1} = \alpha_0 \mu_1^{n+1} + \beta_0 \mu_2^{n+1} + \theta_0, \quad (4)$$

shart qabul qilinadi $x = l$ da esa –

$$\mu_l^{n+1} = \alpha_l \mu_N^{n+1} + \beta_l \mu_{N-1}^{n+1} + \theta_l \quad (5)$$

qabul qilinadi. Umumiy holda $\alpha_0, \beta_0, \theta_0, \alpha_l, \beta_l, \theta_l$ koeffitsientlarning qiymatlari vaqtga bog'liq bo'lishi mumkin.

To'g'ri chiziqlar usuli bilan topilgan u_1, u_2, u_{N-1} va u_N ning qiymatlarini quyidagicha ochib beramiz:

$$u_i^{n+1} = \sum_{p=1}^N b_{i,p} \bar{u}_p^{n+1} = \sum_{p=1}^N b_{i,p} d_p (\bar{u}_p^n + \tau_n \bar{f}_p^{n+1}) = \sum_{p=1}^N b_{i,p} d_p \bar{u}_p^n + \tau_n \sum_{p=1}^N b_{i,p} d_p \bar{f}_p^{n+1}.$$

$$\text{Bu yerda } \bar{f}_p^{n+1} = b_{p,1} \left(f_1^{n+1} + \frac{a^2}{h^2} \mu_0^{n+1} \right) + \sum_{r=2}^{N-1} b_{p,r} f_r^{n+1} + b_{p,N} \left(f_N^{n+1} + \frac{a^2}{h^2} \mu_l^{n+1} \right).$$

Shu munosabat bilan

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= \sum_{p=1}^N b_{i,p} d_p \bar{u}_p^n + \tau_n \sum_{p=1}^N b_{i,p} d_p \left[b_{p,1} \left(f_1^{n+1} + \frac{a^2}{h^2} \mu_0^{n+1} \right) + \right. \\ &+ \left. \sum_{r=2}^{N-1} b_{p,r} f_r^{n+1} + b_{p,N} \left(f_N^{n+1} + \frac{a^2}{h^2} \mu_l^{n+1} \right) \right] = \mu_0^{n+1} \frac{\tau_n a^2}{h^2} \sum_{p=1}^N b_{i,p} b_{p,1} d_p + \\ &+ \mu_l^{n+1} \frac{\tau_n a^2}{h^2} \sum_{p=1}^N b_{i,p} b_{p,N} d_p + \sum_{p=1}^N b_{i,p} d_p \bar{u}_p^n + \tau_n \sum_{p=1}^N \sum_{r=1}^N b_{i,p} b_{p,r} d_p f_r^{n+1}. \end{aligned}$$

Ushbu to'r funksiyaning qiymatlarini mos keladigan indekslarda chegaraviy shartlar yaqinlashishlariga qo'yamiz.

Birinchi shartdan $\mu_0^{n+1} = \mu_0^{n+1} a_0 + \mu_l^{n+1} b_0 + c_0$ kelib chiqadi. Bu yerda

$$a_0 = \frac{\tau_n a^2}{h^2} \sum_{p=1}^N (\alpha_0 b_{1,p} + \beta_0 b_{2,p}) b_{p,1} d_p, \quad b_0 = \frac{\tau_n a^2}{h^2} \sum_{p=1}^N (\alpha_0 b_{1,p} + \beta_0 b_{2,p}) b_{p,N} d_p,$$

$$c_0 = \sum_{p=1}^N (\alpha_0 b_{1,p} + \beta_0 b_{2,p}) d_p \bar{u}_p^n + \tau_n \sum_{p=1}^N \sum_{r=1}^N (\alpha_0 b_{1,p} + \beta_0 b_{2,p}) b_{p,r} d_p f_r^{n+1} + \theta_0.$$

Ikkinchi shart bilan xam xuddi shunday qilamiz va $\mu_l^{n+1} = \mu_0^{n+1} a_l + \mu_l^{n+1} b_l + c_l$ tenglikni olamiz, bu yerda

$$a_l = \frac{\tau_n a^2}{h^2} \sum_{p=1}^N (\alpha_l b_{N,p} + \beta_l b_{N-1,p}) b_{p,1} d_p, \quad b_l = \frac{\tau_n a^2}{h^2} \sum_{p=1}^N (\alpha_l b_{N,p} + \beta_l b_{N-1,p}) b_{p,N} d_p,$$

$$c_l = \sum_{p=1}^N (\alpha_l b_{N,p} + \beta_l b_{N-1,p}) d_p \bar{u}_p^n + \tau_n \sum_{p=1}^N \sum_{r=1}^N (\alpha_l b_{N,p} + \beta_l b_{N-1,p}) b_{p,r} d_p f_r^{n+1} + \theta_l.$$

Yangi olingan ikkita chizikli tenglamalardan sistema tuzamiz:

$$\begin{cases} (1 - a_0) \mu_0^{n+1} - b_0 \mu_l^{n+1} = c_0, \\ -a_l \mu_0^{n+1} + (1 - b_l) \mu_l^{n+1} = c_l. \end{cases} \quad (6)$$

Ushbu sistema asosiy matritsasining determinanti noldan farqli $\Delta = (1 - a_0)(1 - b_l) - a_l b_0$ qiymatga ega deb faraz qilamiz. U holda izlanayotgan funksiyaning chegaraviy qiymatlari uchun

$$\mu_0^{n+1} = \frac{1}{\Delta} [(1 - b_l) c_0 + b_0 c_l], \quad \mu_l^{n+1} = \frac{1}{\Delta} [a_l c_0 + (1 - a_0) c_l]$$

ifodalarga ega bo'lamiz.

Izlanayotgan funksiyaning topilgan chegaraviy qiymatlariga faqat fundamental va diagonal matritsalarining ma'lum elementlari, shuningdek berilgan masalaning chegaraviy shartlari elementlari kirdi. Ular chegaraviy shartlarini qanoatlantiradilar. Faqat chegaraviy shartlar yaqinlashishidan $\alpha_0, \beta_0, \theta_0, \alpha_l, \beta_l, \theta_l$ koeffitsientlarning qiymatlarini aniqlash qoldi.

Klassik issiqlik uzatish nazariyasida to'rtinchi turdagi chegaraviy shart deb ataladigan va bir vaqtning o'zida ikkinchi va uchinchi turdagi shartlarni umumlashtiradigan chegaraviy shartlarga to'xtalamiz[5]:

$$-\lambda \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = \xi_0 [T_{oc}(t) - T(0,t)] + \zeta_0 R_0(t),$$

$$\lambda \frac{\partial T(l,t)}{\partial x} = \xi_l [T_{oc}(t) - T(l,t)] + \zeta_l R_l(t).$$

Bu yerda λ – materialning o‘rtacha issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsienti; ξ – material va harorati $T_{oc}(t)$ deb qabul qilingan atrof-muhit o‘rtasidagi issiqlik uzatish koeffitsienti; ζ – nurli energiya materialining yutilish koeffitsienti; $R(t)$ – nurli energiya intensivligi. Oxirgi uchta ko‘rsatkich chegaralarning har biriga mos ravishda indekslar bilan belgilangan.

Birinchi shartni

$$-\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = \frac{\xi_0}{\lambda} [T_{oc}(t) - T(0,t)] + \frac{\zeta_0}{\lambda} R_0(t)$$

ko‘rinishda yozamiz va unga ikkinchi tartibli aniqlikdagi approksimatsiyani qo‘llaymiz:

$$\frac{3\mu_0^{n+1} - 4u_1^{n+1} + u_2^{n+1}}{2h} = \frac{\xi_0}{\lambda} (T_{oc}^{n+1} - \mu_0^{n+1}) + \frac{\zeta_0}{\lambda} R_0^{n+1}.$$

Tenglamani $2h\lambda$ ga ko‘paytiramiz va o‘xshash hadlarni ixchamlaymiz:

$$(3\lambda + 2h\xi_0)\mu_0^{n+1} = 4\lambda u_1^{n+1} - \lambda u_2^{n+1} + 2h(\xi_0 T_{oc}^{n+1} + \zeta_0 R_0^{n+1}).$$

Bu yerda biz avval qabul qilingan shartning (4) shakliga o‘tamiz, uning uchun koeffitsientlarning qiymatlarini aniqlaymiz:

$$\alpha_0 = \frac{4\lambda}{3\lambda + 2h\xi_0}, \quad \beta_0 = -\frac{\lambda}{3\lambda + 2h\xi_0}, \quad \theta_0 = \frac{2h(\xi_0 T_{oc}^{n+1} + \zeta_0 R_0^{n+1})}{3\lambda + 2h\xi_0}.$$

Yo‘naltirilgan hosilalarning ikkinchi shartga shunga o‘xshash qo‘llanilishi quyidagi chekli-ayirmali tenglamaga olib keladi:

$$\frac{3\mu_l^{n+1} - 4u_N^{n+1} + u_{N-1}^{n+1}}{2h} = \frac{\xi_l}{\lambda} (T_{oc}^{n+1} - \mu_l^{n+1}) - \frac{\zeta_l}{\lambda} R_l^{n+1}.$$

Maxrajlardan xalos bo‘lish va o‘xshash hadlarni ixchamlash shartning (5) koeffitsientlari qiymatlariga olib keladi:

$$\alpha_l = \frac{4\lambda}{3\lambda + 2h\xi_l}, \quad \beta_l = -\frac{\lambda}{3\lambda + 2h\xi_l}, \quad \theta_l = \frac{2h(\xi_l T_{oc}^{n+1} + \zeta_l R_l^{n+1})}{3\lambda + 2h\xi_l}.$$

To‘rtinchi turdagi chegara sharti uchun katta hajmdagi hisoblashlar talab etadigan μ_0^{N+1} va μ_l^{N+1} larni shakllantirishning bir variantini keltirdik. Chegaraviy shartlarning boshqa kombinatsiyalarida koeffitsientlar uchun formulalar qisqaradi[7]. Masalan, agar $x = 0$ da birinchi turdagi shart berilgan bo‘lsa, u holda birinchi tenglama (6) tenglamalar sistemasidan tushib qoladi va hokazo. Shuni inobatga olgan holda, ma‘lum bir chegaraviy masalani yechishda (6) sistemaning μ_0^{N+1} va μ_l^{N+1} larga nisbatan yechimlarini takrorlash maqsadga muvofiqdir, bu esa hisoblash vaqtining qisqarishiga olib keladi.

Umuman olganda, ma‘lum bir masalani hal qilish uchun hisoblash jarayoni quyidagi algoritmgaga muvofiq amalga oshirilishi mumkin.

1. Dastlabki ma‘lumotni, shu jumladan $\alpha_0, \beta_0, \theta_0, \alpha_l, \beta_l, \theta_l$ koeffitsientlarning qiymatlarini kiritish.
2. B va Λ matritsalarini shakllantirish.
3. Elementlari u_i^0 lardan iborat vektorni shakllantirish.

4. Elementlari \bar{u}_i^0 lardan iborat vektorni shakllantirish va $n = 0$ deb qabul qilish.

5. \bar{u}_0^{n+1} va \bar{u}_l^{n+1} va larni hisoblash.

6. Ichki tugunlar uchun \bar{u}_i^{n+1} larni hisoblash.

7. \bar{u}_i^{n+1} ga oldindan o‘tish bilan shartli saqlash.

8. n ni 1 ga oshirib va \bar{u}_i^{n+1} qiymatlarni \bar{u}_i^n yozib olib, vaqt bo‘yicha keyingi qadamga o‘tish

9. Agar vaqt bo‘yicha hisoblashlar oxiriga yetgan bo‘lsa, unda 10-bandga o‘tish, aks holda 5-bandga o‘tish.

10. Hisoblashlarning oxiri.

XULOSA. Ixtiyoriy chegaraviy shartlarga ega masalani to‘g‘ri chiziqlar usulida yechish uchun ilgari ishlab chiqilgan Dirixle masalasiga keltirish usuli taklif qilindi.

Chegaraviy shartlarni Dirixle masalasi shartlari bilan x koordinata bo‘yicha ikkinchi tartibli aniqlik bilan chegaraviy shartlari approksimatsiyalash amalga oshirildi. Ichki tugunlar uchun ikkinchi aniqlik tartibiga ega sxema ham qo‘llanilishi mumkin bo‘lgani uchun

usul x bo'yicha yaqinlashuv aniqligining ikkinchi tartibini ta'minlaydi.

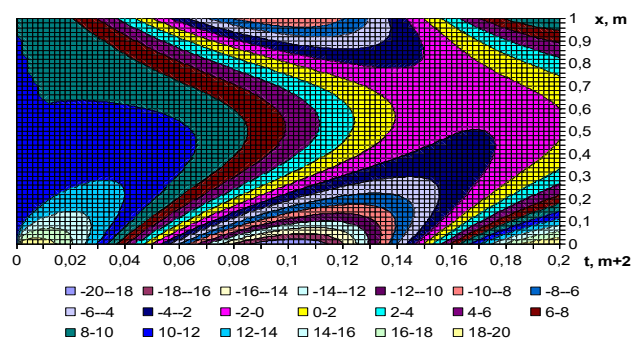
Usulning zaif tomoni – izlanayotgan funksiyaga nisbatan avtonom tenglamani yechish uchun oddiy differensial tenglamalarni yechishning aniq usulidan foydalanishning istisno qilinganligi. Ammo chekli-ayirmali tenglamaning o'ng tomonini ikki vaqt qadami uchun o'rtacha arifmetik sifatida ifoda etish orqali vaqt bo'yicha aniqlik tartibini oshirish imkoniyati mavjud.

Usulning asosiy ustunligi shundaki, u chegara shartlarining odatiy yaqinlashuviga qaytishga imkon beradi (to'g'ri chiziqlar usulida chegara shartlari uchun integro-interpolyatsiya usuli qo'llaniladi). Bu bilan ilgari differensial-ayirmali usul doirasida ko'rib chiqilmagan muayyan chegara (kesma, to'g'ri to'rtburchak) ning alohida qismlariga har xil chegara shartlari qo'yilgan hollar hisobiga differensial-ayirmali usuli bilan hal qilinadigan masalalar sinfi kengayadi.

Ikki va uch o'lchovli masalalarni yechishda chegaraviy shartni almashtirishning yuqorida keltirilgan usuli koordinatalarning har biri uchun qo'llaniladi, ammo to'r funksiyalariga qo'shimcha indekslar qo'shiladi va $\frac{d\bar{u}_i^{n+1}}{dt}$ had esa, masalan,

$$\frac{\partial \bar{u}_{i,j,k}^{n+1}}{\partial t} - a^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_{i,j,k}^{n+1}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_{i,j,k}^{n+1}}{\partial z^2} \right)$$

bilan almashtiriladi va hokazo.



1-rasm. Bir o'lchovli sohada harorat maydonining dinamikasi.

$$f(x,t) = 0, T_0(x) = 5^\circ C, \mu_0(t) = 20 \cos 10\pi t$$

$$\text{va } \mu_1(t) = 10 \cos 10\pi t$$

Elliptik, parabolik va giperbolik tipdagi tenglamalarga asoslangan bir va ko'p o'lchovli masalalar bo'yicha ishni davom ettirish maqsadga muvofiq. Chunki boshqa usullardan farqli ravishda aniq natija olinadi.

Uzunligi 1 m bo'lgan bir jinsli sterjenda issiqlik uzatish jarayoni uchun hisoblashlar olib borildi. $N = 49$ da x bo'yicha qadam 0,02 m ni tashkil etdi. t vaqt bo'yicha qadam 0,0001 s qiymatga ega bo'ldi. Vaqt bo'yicha har 20 qadamdan so'ng harorat maydoni saqlanib qolindi, bu izotermalar shaklida (t, x) hisoblash tekisligida aks ettirildi.

Adabiyotlar ro'yxati

1. Тихонов А.М., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука. – 1977. – С. 735,736.
2. Равшанов Н., Шарипов Д.К. Модель и численный алгоритм для прогнозирования процесса распространения вредных веществ в атмосфере. – Проблемы информатики и энергетики, Ташкент. 2011, №4. – С. 3-10.
3. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. – М.: Наука, 1987. – 464 (часть I), 360 (часть II) с.
4. Хужаев И.К., Хужаев Ж.И. Дифференциально-разностный метод для решения неоднородного параболического уравнения при граничных условиях второго рода // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент, 2018. – №1(13). – С. 63-69.
5. Шаимов К.М., Эшмуродов М.Х., Хужаев И.К. Численный метод решения задач о движущихся точечных источниках тепла внутри области теплообмена // Проблемы вычислительной и прикладной математики. Ташкент 2020 г. – №1. (25). С. 59-68.
6. Antonio Campo, Yunesky Masip Macia, Jaime Sieres. Semi-analytical solution of unsteady heat conduction in plain walls with equal surface temperatures: The Transversal Method Of Lines (TMOL) delimited to the "small time" sub-domain // International Communications in Heat and Mass Transfer Volume 116, July 2020, 104687.

